

Jakub PEKSIŃSKI\*  
Grzegorz MIKOŁAJCZAK\*  
Janusz KOWALSKI\*\*

## PREZENTACJA MODULACJI FM W PROGRAMIE MATHCAD

W pracy przedstawiono przykładową dydaktyczną aplikację w oparciu o uniwersalny program do obliczeń matematycznych MathCad. Program ten posiada duże możliwości obliczeniowe a jednocześnie jest łatwy w obsłudze i nie wymagającym nauki programowania, przez co jest efektywnym narzędziem w procesie dydaktycznym z wielu przedmiotów, gdzie wymaga się przeprowadzenia symulacji komputerowych. W artykule autorzy omówili i przedstawili jedną z podstawowych modulacji analogowej – modulację częstotliwości FM, która została przedstawiona jako implementacja w popularnym programie matematycznym Mathcad. Zaproponowany przykład może służyć jako materiał dydaktyczny dla studentów kierunków związanych z telekomunikacją.

SŁOWA KLUCZOWE: modulacja analogowa, dydaktyczna prezentacja, widmo sygnału

### 1. RODZAJE MODULACJA ANALOGOWYCH – MODULACJA FM

Systemy telekomunikacyjne, których podstawowym zadaniem jest przeniesienie informacji od nadawcy do odbiorcy możemy podzielić na dwie grupy:

- systemy analogowe,
- systemy cyfrowe.

System analogowy składa się z następujących elementów pokazanych na rysunku 1. Jak widać na schemacie, w systemach analogowych sygnał nadawany (użyteczny) jest bezpośrednio doprowadzony do modulatora analogowego [1, 2].

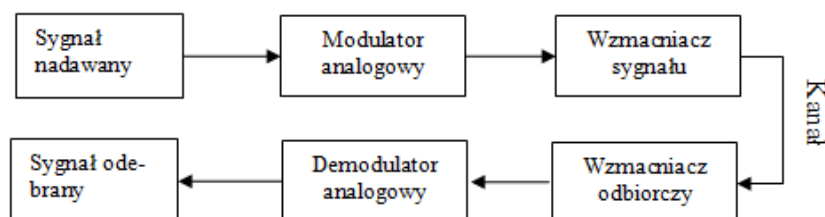
Podstawowym celem systemu telekomunikacyjnego jest dostarczenie wiadomości pochodzącej ze źródła sygnału do odbiornika. Przy czym informacja ta musi być dostarczona w odpowiedniej zrozumiałej formie. Do osiągnięcia tego celu wykorzystuje się proces zwany modulacją.

Modulacja jest to jedna z podstawowych operacji które są wykonywane na sygnałach w systemach telekomunikacyjnych. Dzięki modulacji jest możliwe

\* Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie.

\*\* Pomorski Uniwersytet Medyczny w Szczecinie.

sprawne przesłanie sygnałów na odległość. Bez operacji modulacji przesyłanie sygnałów byłoby prawie niemożliwe a sprawność takiej transmisji byłaby znikomą. Ogólnie można powiedzieć, że proces modulacji polega on na zmianie jednego z parametrów fali nośnej zgodnie ze zmianami fali informacyjnej [2, 3].



Rys. 1. Schemat blokowy analogowego systemu telekomunikacyjnego

Zastosowanie modulacji daje wiele korzyści w systemach telekomunikacyjnych. Dzięki stosowaniu modulacji możemy [2]:

- uzyskać sprawną emisję sygnału w postaci fali elektromagnetycznej przesłanej do wolnej przestrzeni;
- uzyskać optymalne wykorzystanie kanału transmisyjnego. Bez procesu modulacji w jednym kanale moglibyśmy przesłać tylko jeden sygnał;
- uodpornić sygnał na szумы i zakłócenia powstałe w kanale transmisyjnym.

Do podstawowych modulacji analogowych zalicza się:

- modulację amplitudy AM,
- modulację częstotliwości FM,
- modulację fazy PM.

## 2. PROGRAM MATHCAD

MathCad to uniwersalny program do obliczeń matematycznych – o bardzo dużych możliwościach a zarazem łatwy do opanowania, nie wymagający nauki języka programowania. Począwszy od roku 1986 kolejne wersje MathCAD'a rozwijała firma MathSoft Inc. Obecnie program ten jest rozprowadzany w wielu wersjach pod nazwą PTC Mathcad Prime 3.1, gdyż w kwietniu 2006 r Mathsoft została przejęta przez Parametric Technology Corporation (PTC Inc., [www.ptc.com](http://www.ptc.com)). Firma PTC jest jednym z liderów producentów oprogramowania do obliczeń inżynierskich na świecie.

Mathcad to komercyjny program klasyfikowany jako CAS lub komputerowy system obliczeń symbolicznych (*ang. Computer Algebra System, System Algebry Komputerowej*), wspomagający obliczenia symboliczne w matematyce, fizyce i dyscyplinach technicznych. Większość programów CAS umożliwia rysowanie wykresów funkcji (jednej i dwu zmiennych oraz zmiennej zespolonej).

nej) i przeprowadzanie obliczeń z praktycznie dowolną dokładnością. Wiele z nich ma wbudowane języki programowania, dzięki czemu użytkownik może wykorzystywać do rozwiązywania zadań własne algorytmy i zwiększać w ten sposób funkcjonalność programu.

Systemy algebry komputerowej należy właściwie odróżnić od programów przeznaczonych do obliczeń numerycznych i inżynierskich takich jak MATLAB, SciLab czy Octave. Rozgraniczenie nie jest jednakże jednoznaczne, gdyż niektóre systemy algebraiczne zawierają moduły umożliwiające szybkie obliczenia numeryczne. Wśród tego typu oprogramowania można wymienić następujące programy: CoCoA, Derive (nierozwijany), Maple, Mathematica, MuPAD, Maxima, Sage, Yacas.

Przykładowy dokument przedstawiono na rys. 2, który można znaleźć w szeroko rozbudowanym systemie pomocy programu MathCad 14 [6]. Dokumenty te tworzy się z różnych obiektów, zwanych „regionami”, które wywołane w odpowiedni sposób, poprzez kombinację klawiszy lub z Menu, program odpowiednio interpretuje. Najważniejsze z nich to: „region tekstów” który spełnia rolę edytora tekstu. Można dzięki temu umieszczać w dokumencie niezbędne komentarze, jak i napisać krótki tekst. Drugi to tzw. Region „wzorów matematycznych”, które na dokumencie mogą wyglądać jak klasyczne wzory z podręczników matematyki. Oprócz tego program zawiera szereg funkcji i procedur matematycznych, wywoływanych w prosty sposób. Możliwe są również obliczenia symboliczne. Trzecim głównym typem regionów jest tzw. „region wykresów”, który umożliwia tworzenie różnorodnych wykresów, zarówno 2D jak i 3D. Oprócz tego program umożliwia pracę z zewnętrznymi zbiorami danych oraz wykonywanie operacji dyskowych. Dodatkowo korzystając z regionu „programming pallet”, można tworzyć własne zaawansowane procedury.

Dokumenty MathCAD'a – są to pliki, które spełniają jednocześnie rolę publikacji jak i programu wykonującego obliczenia matematyczne, generującego różnego rodzaju wykresy, które wizualizują otrzymane wyniki.

Bogaty zakres operatorów i funkcji pozwala rozwiązywać równania i nierówności, algebraiczne i różniczkowe (liniowe i nieliniowe), wyznaczać całki, pochodne, transformaty Fouriera, regresje i korelacje, prowadzić działania na wektorach, macierzach, obliczenia statystyczne, używać fizycznych jednostek miar (z automatycznym ich przeliczaniem) wczytywać dane z plików dyskowych i zapisywać do plików oraz wykonywać wiele innych operacji [7].

Mathcad jest oprogramowaniem, które łączy w sobie funkcjonalność procesora i edytora tekstu z zaawansowanym arkuszem kalkulacyjnym. Pozwala jednocześnie i interaktywnie wykorzystywać teksty, formuły matematyczne, tabele, wykresy, a nawet animacje. Dodatkowym atutem jest możliwość weryfikacji poprawności formuł i zawartości tworzonych dokumentów. Jako produkt z portfolio rozwiązań z rodziny PDS posiada również narzędzia integrujące jego środowisko ze środowiskiem rozwiązań CAD.

**mathcad data analysis**  
extension pack

**PRECONDITIONING DATA**

### Moving Average Smoothing

A smoothing technique which is particularly applicable to time-series data is moving average filtering. The moving average calculates the mean, or average, of  $n$  points around each data point, and substitutes that value for the data. This makes it somewhat more sensitive to outliers than **median smoothing**, as with all cases in which the mean and median are compared.

Enter a matrix of noisy X-Y data to be analyzed:     data :=

0	0
1	0.03
2	0.2
3	...

$\underline{\text{data}} := \text{csort}(\text{data}, 0)$

$X := \text{data} \langle 0 \rangle \quad Y := \text{data} \langle 1 \rangle$

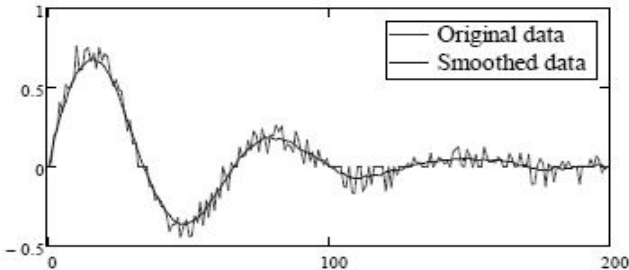
Enter a window size for moving average (odd integer  $0 < w < n$ ):     w := 13

w must be odd for a symmetric window      $m := \frac{w-1}{2}$

Number of data points:     n := rows(data)     n = 200

Near the endpoints, systematically decrease the window size, but keep it symmetric and as large as possible.

Smoothed data:     i := 0..n-1

$$\text{mv}_{\text{g\_avg}} := \left[ \begin{array}{l} \sum_{j=0}^{2-i} Y_j \\ (2-i) + 1 \end{array} , \text{if } i > n-1-m, \left[ \begin{array}{l} \sum_{j=2-i-n+1}^{n-1} Y_j \\ 2n-1-2-i \end{array} , \sum_{j=i-m}^{i+m} Y_j \\ w \end{array} \right] \right]$$


There is a built-in version of the moving average filter in the **Signal Processing Extension Pack**, available separately from PTC.

Rys. 2. Zrzut ekranu przykładowego arkusza programu Mathcad 14 zamieszczonego w pomocach (Help) [6]

Najnowsza wersja programu: PTC Mathcad Prime 3.1 posiada nowy, ulepszony interfejs API [6]. Pozwala na integracje programu Mathcad z dowolną

platformą CAD, oprogramowaniem programistycznym, narzędziami do analizy czy systemem PDM. Wiele gotowych arkuszy i szablonów do obliczeń mechanicznych, elektrycznych, matematycznych, chemicznych i wielu innych.

### 3. MODULACJA CZĘSTOTLIWOŚCI FM

Modulacja częstotliwości, skr. FM (*od ang. Frequency Modulation*) – kodowanie informacji w fali nośnej przez zmiany jej chwilowej częstotliwości w zależności od sygnału wejściowego, tj. jej modulację. Modulacja częstotliwości jest systemem transmisji sygnału analogowego stosowanym do przesyłania sygnału radiowego radia publicznego w zakresie fal ultrakrótkich, stąd zakres ten w mowie potocznej często określa się jako „FM”. Modulację częstotliwości stosuje się też w transmisji sygnału w telewizji satelitarnej, dźwiękowego w wielu systemach telewizji naziemnej oraz informacji o kolorze (chrominancji) w systemie telewizji kolorowej SECAM. System ten umożliwia odfiltrowanie po stronie odbiornika znacznie więcej zakłóceń niż w systemie AM. Sygnał po odebraniu i wzmacnieniu może być ograniczony do takiej samej amplitudy, dzięki czemu udaje się wyeliminować większość zakłóceń.

Uzyskany w wyniku sygnał zmodulowany jest sygnałem wąskopasmowym, który nadaje się np. do transmisji drogą radiową. Istotnym elementem systemu telekomunikacyjnego jest Modulator Analogowy, który ma za zadanie przekształcić sygnał nadawany na postać dogodną do transmisji przez kanał.

Proces taki nazywamy modulacją, polega on na zmianach parametrów fali nośnej zgodnie ze zmianami sygnału użytecznego.

Podczas modulacji częstotliwościowej (FM – *Frequency Modulation*) zachodzi:

- im większa jest wartość amplitudy sygnału modulującego, tym większa jest zmiana sygnału nośnego wielkiej częstotliwości (w.cz.) w stosunku do częstotliwości środkowej  $f_0$  tego sygnału (amplituda sygnału modulującego określa wartość zmiany częstotliwości sygnału nośnego w.cz.),
- im częstotliwość sygnału modulującego jest większa, tym większa jest liczba zmian częstotliwości sygnału w.cz. przypadająca na sekundę.

Postać sygnału zmodulowanego częstotliwościowo jest opisana wzorem:

$$y_{FM}(t) = A_c \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_c \cdot t + \beta \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_m \cdot t)) \quad (1)$$

gdzie:  $A_c$  – amplituda fali nośnej;  $f_c$  – częstotliwość fali nośnej;  $f_m$  – częstotliwość fali modulującej;

Wielkością charakterystyczną dla modulacji częstotliwościowej jest tzw. wskaźnik modulacji częstotliwości:

$$\beta = \frac{\Delta f_{\max}}{f_m}$$

gdzie:  $\Delta f_{\max}$  – największa dopuszczalna wartość dewiacji częstotliwości.

#### 4. PRZYKŁAD MODULACJI CZĘSTOTLIWOŚCIOWEJ FM JEDNYM TONEM W PROGRAMIE MATHCAD

Poniżej zostanie przedstawiona prezentacja modulacji FM z wykorzystaniem programu Mathcad 14 .

*Cel ćwiczenia:*

- wygenerowanie sygnału FM zmodulowanego jednym tonem,
- zbadanie jego widma w zależności od zmian parametru  $\beta$ .

*Przebieg ćwiczenia:*

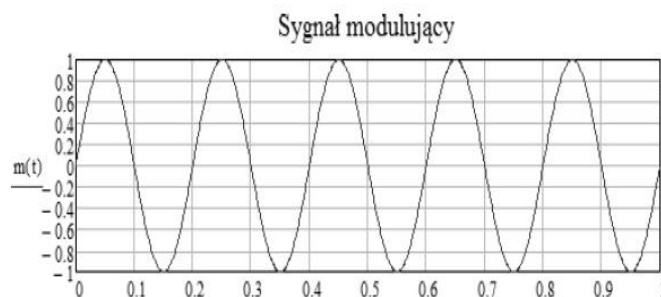
Definiujemy falę modulującą  $m(t)$  w postaci jednego tonu harmonicznego o następujących parametrach::

$Am:=1$  – amplituda fali modulującej

$fm:=5$  – częstotliwość fali modulującej

$m(t):=Am \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot fm \cdot t)$  – **postać fali modulującej**

Na rys. 3 przedstawiono wykres fali modulującej.



Rys. 3. Sygnał modulujący  $m(t):=Am \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot fm \cdot t)$  wygenerowany w programie Mathcad

Definiujemy falę nośną  $n(t)$  o następujących parametrach:

$AC:=3$  – amplituda fali nośnej

$fc:=25$  – częstotliwość fali nośnej

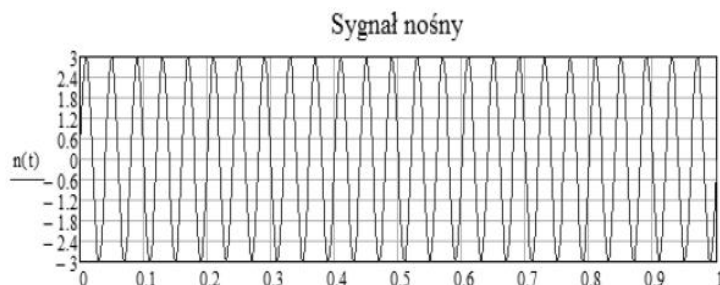
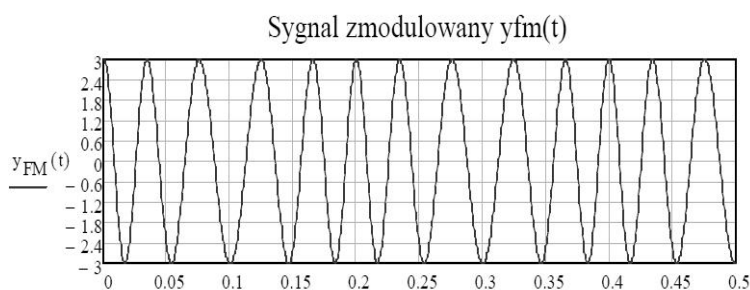
$n(t):=AC \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot fc \cdot t)$  – **postać fali nośnej**

Na rys. 4 przedstawiono wykres fali nośnej.

Wyznaczamy sygnał zmodulowany  $y_{FM}(t)$  o postaci:

$$y_{FM}(t):=AC \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot fc \cdot t + m(t))$$

Na rys. 5 przedstawiono postać sygnału FM zmodulowanego jednym tonem.

Rys. 4. Sygnał fali nośnej  $n(t) := AC \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot fC \cdot t)$  wygenerowany w programie Mathcad

Rys. 5. Sygnał zmodulowany wygenerowany w programie Mathcad

Wyznaczamy szerokość pasma sygnału zmodulowanego FM.

Do wyznaczenia szerokości sygnału zmodulowanego FM konieczne jest wyznaczenie widma sygnału zmodulowanego. W tym celu posłużono się dyskretną transformatą Fouriera (DTF), zdefiniowaną następująco:

$N := 512$  – ilość próbek ( $n := 0..N-1$  – zmienna)

$fs := 128$  – częstotliwość próbkowania

$ts := 0.0078125$  – okres próbkowania

$yFMn := yFM(n \cdot ts)$  – postać dyskretna sygnału zmodulowanego

Wyznaczamy widmo sygnału zmodulowanego FM za pomocą DFT:

$$DFT y_{FM_n} := \sum_{k=0}^{N-1} y_{AM_k} \cdot e^{\frac{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot k}{N}} \quad (2)$$

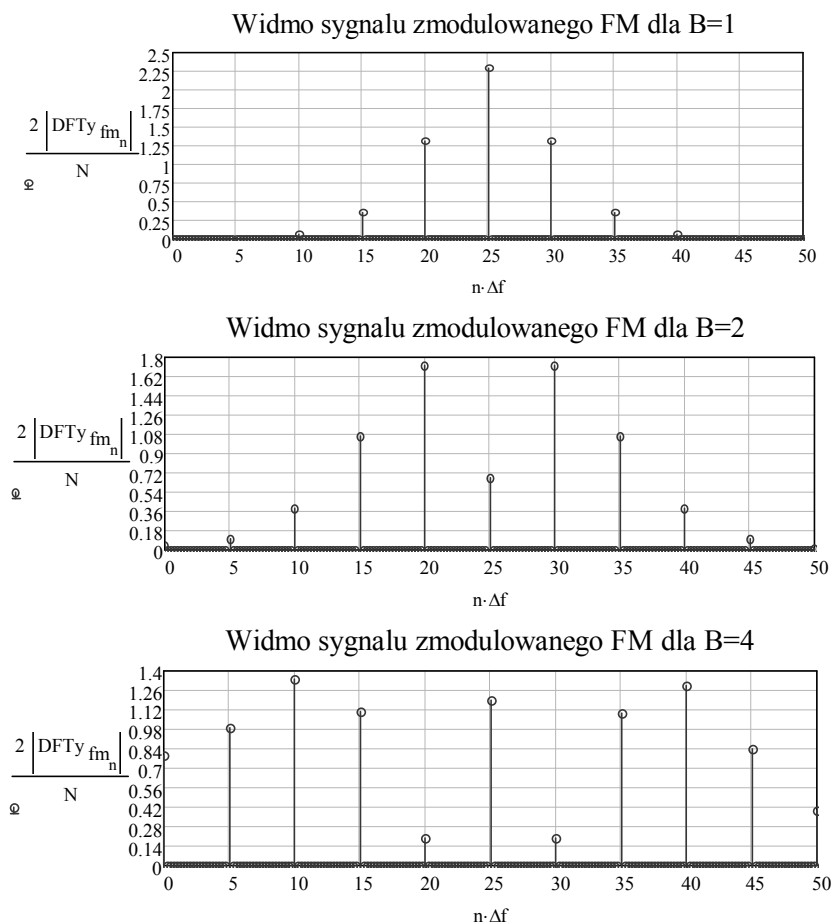
Rysunek 6. Przedstawia widmo sygnału FM zmodulowanego jednym tonem dla kilku wielkość parametru  $\beta$ .

Jak widać im większy parametr  $\beta$  tym widmo sygnału zmodulowanego częstotliwościowo staje się coraz szersze. Oznacza to, że w zależności od wielkości tego parametru możemy mówić o modulacji wąskopasmowej lub o modulacji szerokopasmowej o praktycznie nieograniczonym paśmie. Jak widać na rysunku

widmo sygnału zmodulowanego składa się z częstotliwości nośnej oraz częstotliwości będących sumą i różnicą częstotliwości sygnału modulującego i nośnej. Można stwierdzić, że szerokość pasma sygnału zmodulowanego częstotliwościowo nie może być wyznaczona w sposób dokładny. Jednak można stwierdzić, że znaczna część mocy nadawanej (99%) zawiera się w fali nośnej oraz w  $n+1$  składowych leżących powyżej i po niżej. W związku z tym szerokość pasma sygnału zmodulowanego możemy wyznaczyć korzystając ze wzoru (3).

$$\beta = 2 \cdot (n+1) \cdot f_m \quad (3)$$

Ponieważ Modulacja FM zalicza się do grupy modulacji nieliniowych to z tego względu jej widma nie można uzyskać poprzez dodawanie widm poszczególnych składowych



Rys. 6. Widmo sygnału zmodulowanego FM w zależności od parametru  $\beta$



Sygnaly z modulacją FM zajmują szersze pasmo częstotliwości w porównaniu z sygnałami zmodulowanymi AM. Zaletą modulacji FM jest odporność na szumy i zakłócenia.

### LITERATURA

- [1] Tiede U., Schenk Ch. , Układy Półprzewodnikowe, WNT W-wa 2009 .
- [2] Szabatın J., Podstawy Teorii Sygnałów , WKŁ 2002.
- [3] Haykin S., Systemy Telekomunikacyjne 1, WKŁ – Warszawa 2004.
- [4] Haykin S., Systemy Telekomunikacyjne 2, WKŁ – Warszawa 2004.
- [5] Wesołowski K. , „Systemy Radiokomunikacji Ruchomej”, WKŁ 2000.
- [6] <http://www.mathcad.pl/>
- [7] Pęksiński J., Mikołajczak G., „Prezentacja modulacji AM w programie MathCad”, POZNAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY ACADEMIC JOURNALS Electrical Engineering, 80/2014 s.211–215, 2014.

### PRESENTATION FM MODULATION PROGRAM MATHCAD

The paper presents an example of educational application on the basis of universal program for mathematical calculations MathCad. This program has a large computational capabilities while still being easy to use and does not require learning programming, which is an effective tool in teaching in many subjects, which are required to perform computer simulations. In the article, the authors discuss one of the basic analog modulation – frequency modulation FM. FM modulation is presented as an implementation of a mathematical program Mathcad.

*(Received: 01. 02. 2017, revised: 27. 02. 2017)*