

Jakub PEKSIŃSKI*
Grzegorz MIKOŁAJCZAK*
Janusz KOWALSKI**

WPLYW WYBORU KRYTERIUM BŁĘDU FILTRACJI NA OCENĘ DZIAŁANIA FILTRÓW WYGŁADZAJĄCYCH

W pracy porównano dwa kryteria oceny jakości przetwarzania sygnałów: błąd średniokwadratowy MSE i średni błąd absolutny MAE pod zgodności ocen. Porównania dokonano w oparciu o ważony filtr średniej ruchomej, który zaliczamy do filtrów wygładzających.

SŁOWA KLUCZOWE: filtry wygładzające, MSE, MAE

1. WSTĘP

Wygładzanie jest jedną z metod cyfrowego przetwarzania sygnałów, polegającą na estymacji wartości sygnałów w ustalonych chwilach na podstawie zarówno poprzednich, jak i następnych obserwacji.

$$x_k = s_k + n_k \quad (1)$$

gdzie: x_k – sygnał zakłócony, s_k – sygnał niezakłócony, n_k – zakłócenie.

W praktyce polega to zastąpieniu ciągu próbek sygnału $\{x_k\}$ obarczonego zakłóceniem losowym $\{n_k\}$, o określonym modelu, nowym ciągiem $\{y_k\}$ o przebiegu gładszym, o którym można przypuszczać, że lepiej reprezentuje istotę zjawiska niż szereg pierwotny, tak by wyeliminować szum, jednocześnie zachowując pierwotny sygnał. Najczęstszą metodą rozwiązania problemu wygładzania jest odpowiednia filtracja sygnału cyfrowego, skąd pochodzi również określenie „filtr wygładzający” [1].

Jako przykład można podać, pięcioelementowy filtr średniej ważonej, (ang. *weight moving average*), na podstawie, którego będą prowadzone rozważania dotyczące wyboru kryterium filtracji:

$$y_i = \frac{x_i + a \cdot (x_{i-1} + x_{i+1}) + b \cdot (x_{i-2} + x_{i+2})}{1 + 2a + 2b} \quad (2)$$

gdzie: a , b – współczynniki wagowe.

* Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie.

** Pomorski Uniwersytet Medyczny w Szczecinie.

Dla opisanej metody wygładzania współczynnik redukcji szumu q (stosunek wariancji zakłócenia na wyjściu do wariancji zakłócenia wejściowego), który jest niezależny od rozkładu zakłócenia, wyraża się zależnością:

$$q_w = \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} = \frac{1 + 2a^2 + 2b^2}{(1 + 2a + 2b)^2} \quad (3)$$

Filtry wygładzające znalazły we współczesnym świecie nauki szerokie zastosowanie, gdyż istotą każdego eksperymentu jest pomiar różnych parametrów i wielkości, które w trakcie trwania analizowanego zjawiska mogą być obciążone różnego rodzaju zakłóceniami o charakterze losowym. W świecie nauki sygnałów o takim charakterze jest wiele, począwszy od przebiegów ekonometrycznych i statystycznych, poprzez sygnały określające procesy technologiczne, zjawiska fizyczne i chemiczne, kończąc na sygnałach w telekomunikacji i elektronice.

Dla porównania właściwości poszczególnych metod wygładzania konieczne jest skonfrontowanie stopnia zakłóceń oraz zniekształceń sygnału przed i po filtracji. Do tego służą odpowiednie, obiektywne wskaźniki jakości. Znalezienie uniwersalnego kryterium, które możliwie dokładnie odzwierciedlałoby „jakość” wygładzania, jest trudne, gdyż w ocenie mogą być brane pod uwagę również wrażenia subiektywne, zwłaszcza gdy proces wygładzania dotyczy obrazów cyfrowych lub też sygnałów akustycznych. Oprócz tego zastosowane kryterium jakości, może mieć wpływ na proces optymalizacji doboru współczynników wagowych poszczególnych metod wygładzania. Z tego powodu w niniejszej pracy porównano dwa najczęściej stosowane kryteria [2]: błąd średniokwadratowy MSE (*Mean Squar Error*):

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - s_i)^2 \quad (4)$$

oraz błąd średni bezwzględny MAE (*Mean Absolute Error*) opisane zależnościami:

$$MAE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |y_i - s_i| \quad (5)$$

gdzie: s_i – wartość dokładna sygnału, y_i – wynik wygładzania.

Porównanie wymienionych kryteriów zostanie dokonane dla sygnału o postaci zakłócenia losowego, tzn. $\{x_i\}$, który stanowi realizację zmiennej losowej o rozkładzie normalnym $X \sim N(0, \sigma)$. Przypadek ten można interpretować jako tłumienie zakłócenia bez ingerencji procesu wygładzania na sygnał użyteczny. Ma to miejsce w przypadku wygładzania sygnałów wolnozmiennych z dużą częstotliwością próbkowania a także stałych z zakłóceniem losowym. Zagadnienie to przedstawiono w następnym rozdziale, gdzie punktem wyjścia są rozważania zawarte w pracy [3].

2. ZALEŻNOŚĆ MIĘDZY MSE A MAE DLA ZMIENNEJ LOSOWEJ O ROZKŁADZIE NORMALNYM

Jeżeli na wejście filtru wygładzającego wprowadzić tylko sygnał zakłócający $\{n_i\}$, który jest realizacją zmiennej losowej rozkładzie normalnym $N \sim N(0, \sigma)$, to na wyjściu filtru ruchomej średniej ważonej (2), otrzymamy sygnał o rozkładzie normalnym zmiennej losowej $Y \sim N(0, \sigma_y)$, dla którego odchylenie standardowe wynosi:

$$\sigma_y = \sigma \cdot \sqrt{q_w} = \sigma \cdot \frac{\sqrt{1 + 2a^2 + 2b^2}}{(1 + 2a + 2b)} \quad (6)$$

Wprowadzając nową zmienną losową Z taką, że $x_i = n_i$:

$$z_i = y_i - x_i \quad (7)$$

Oraz podstawiając za y_i zależność (2), będącą wynikiem wygładzania tylko zakłócenia $x_i = n_i$, otrzymamy zależność:

$$z_i = \frac{bx_{i-2} + ax_{i-1} - 2(a+b)x_i + ax_{i+1} + bx_{i+2}}{1 + 2a + 2b} \quad (8)$$

Zmienna losowa Z ma również rozkład losowy normalny $Z \sim N(0, \sigma_z)$, gdzie:

$$\sigma_z = \sigma \cdot \frac{\sqrt{6a^2 + 8ab + 6b^2}}{(1 + 2a + 2b)} \quad (9)$$

Podstawiając (7) do wzoru na MAE (5), dla którego w tym przypadku $s_i = n_i$ zachodzi:

$$MAE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |z_i| \quad (10)$$

Można zauważyć, że wartość błędu MAE, odpowiada wartości przeciętnej zmiennej losowej $U = |Z|$, tzn. $MAE = E(|Z|)$ dla której gęstość rozkładu wyraża się wzorem:

$$f(u) = \frac{2}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_z^2} \cdot \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma_z^2}\right) \quad u \geq 0 \quad (11)$$

Wartość przeciętna wyraża się zależnością:

$$E(U) = \int_0^{\infty} u \cdot f(u) du \quad (12)$$

Skąd możemy wyznaczyć:

$$MAE = E(U) = \sigma_z \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} = \sigma \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{6a^2 + 8ab + 6b^2}}{(1 + 2a + 2b)} \quad (13)$$

W przypadku kryterium MSE (4), wartość tego kryterium w analizowanym przypadku jest równy wartości oczekiwanej zmiennej losowej Z^2 i wyraża się zależnością:

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (z_i)^2 = E(Z^2) = \sigma_z^2 \quad (14)$$

Zmienna losowa Z^2 ma rozkład chi-kwadrat, której wartość przeciętna w tym przypadku wynosi $E(Z^2) = \sigma_z^2$. Porównując wzory (14) i (13) możemy wyznaczyć związek między kryteriami MAE i MSE w przypadku gdy wygładzany jest tylko sygnał zakłócenia.

$$MAE = \sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot MSE} \quad (15)$$

Powyższy związek określa zależność między MSE i MAE oraz informuje, że minimum błędu MSE implikuje minimum błędu MAE. Konsekwencją tego związku jest, że w przypadku przetwarzania sygnałów w obecności zakłócenia o rozkładzie normalnym $N(0, \sigma)$, wystarczy analizować jedno z tych dwu kryteriów: MSE lub MAE. To założenie, jak podano na podstawie [3] i powyższych zależności jest słuszne dla sygnału testowego, jakim jest zakłócenie losowe, w tym przypadku o rozkładzie normalnym $N(0, \sigma)$. W następnym rozdziale podano wyniki testów

3. WYNIKI TESTÓW

W celu zbadania hipotezy dotyczącej tego, że w przypadku oceny jakości wygładzania poprzez wartość kryterium MSE lub MAE, wystarczy analiza jednego z nich, wykonano symulacje w programie MathCad 15, polegające na wygładzaniu zaszumionych sygnałów testowych, ważonym filtrem średniej ruchomej, określonego zależnością (2).

Dla tego filtru, minimum błędu MSE i MAE, uzyskuje się dla przypadku $a = b$. Przyjmując we wzorze (3) $b = a$ otrzymamy zależność na współczynnik a w funkcji współczynnika redukcji zakłócenia q_w :

$$a = \frac{2q_w - \sqrt{5q_w - 1}}{2 - 8q_w} \quad (16)$$

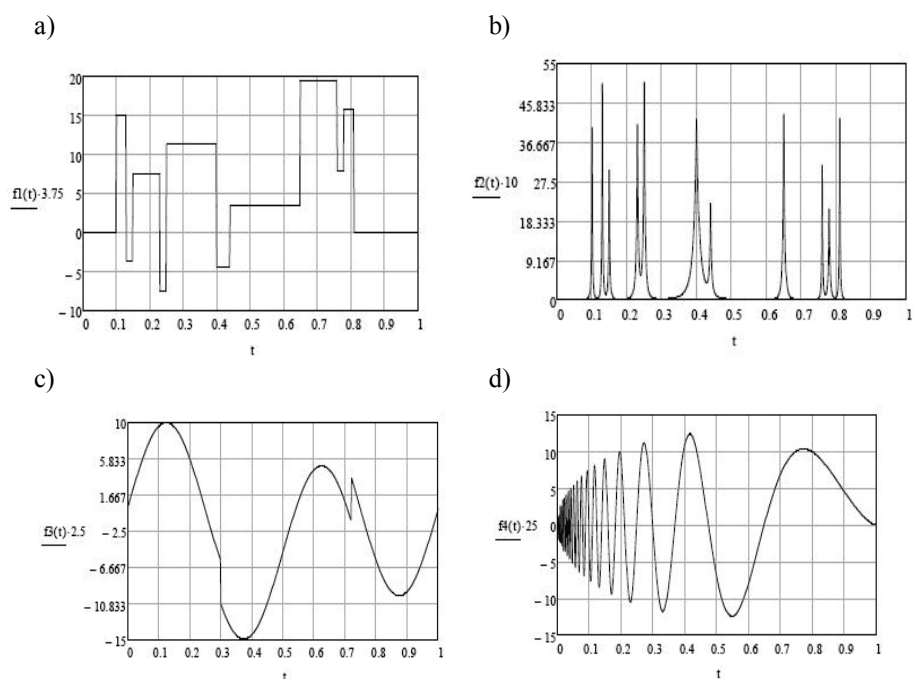
Współczynniki ważonego filtru średniej ruchomej dobrano w oparciu o założoną wartość współczynnika redukcji szumu, których wartości przedstawiają się następująco:

$$\begin{aligned} q_w = 0,3 &\rightarrow a = 0,268 \\ q_w = 0,4 &\rightarrow a = 0,167 \\ q_w = 0,5 &\rightarrow a = 0,112 \end{aligned} \quad (17)$$

Jako miary do porównania stopnia zgodności kryterium MSE i MAE użyto zależności wynikającej ze wzoru (15), gdzie MSE i MAE obliczano za pomocą wzorów (3) i (4).

$$\Delta = \left| \frac{MAE^2}{MSE} - \frac{2}{\pi} \right| \quad (18)$$

Jako sygnałów testowych $\{s_k\}$, użyto funkcji przedstawionych w pracy [6], których formuły i nazwy przedstawiono poniżej, natomiast ich przebiegi na rys. 1. Sygnały testowe były zakłócone szumem addytywnym o rozkładzie normalnym $N(0, \sigma)$ dla trzech wartości σ (odpowiednio 1; 3; 6), oprócz tego dobrano tak sygnały testowe by miały te same moce. Dodatkowo zmieniano wartości współczynnika wagowego b w zależności (2), traktując go jako parametr.



Rys. 1. Przebieg sygnału oryginalnego $\{s_n\}$ a) Blocks, b) Bumps, c) HeaviSine d) Doppler [6]

Sygnały testowe:

– Blocks:

$$f(t) = \sum h_j K(t - t_j) \quad K(t) = 0,5 \cdot (1 + \text{sgn}(t)) \quad (19)$$

$$t_j = \{0.1; 0.13; 0.15; 0.23; 0.25; 0.40; 0.44; 0.65; 0.76; 0.78; 0.81\}$$

$$h_j = \{4; -5; 3; -4; 5; -4.2; 2.1; 4.3; -3.1; 2.1; -4.2\}$$

– Bumps:

$$f(t) = \sum h_j K\left(\frac{t-t_j}{w_j}\right) \quad K(t) = (1 + |t|)^{-4} \quad (20)$$

$$t_j = \{0.1; 0.13; 0.15; 0.23; 0.25; 0.40; 0.44; 0.65; 0.76; 0.78; 0.81\}$$

$$h_j = \{4; 5; 3; 4; 5; 4.2; 2.1; 4.3; 3.1; 2.1; 4.2\}$$

$$w_j = \{0.005; 0.005; 0.006; 0.01; 0.01; 0.03; 0.01; 0.01; 0.005; 0.008; 0.005\}$$

– HeaviSine:

$$f(t) = 4 \sin(4\pi t) - \operatorname{sgn}(t - 0.3) - \operatorname{sgn}(0.72 - t) \quad (21)$$

– Doppler:

$$f(t) = \sqrt{t(1-t)} \sin\left(\frac{2\pi(1+\varepsilon)}{t+\varepsilon}\right) \quad \varepsilon = 0.05 \quad (22)$$

3. WNIOSKI

Analizując wyniki uzyskane w tabelach 1–3, można stwierdzić, że największą zgodność kryteriów MSE i MAE wynikającą, z zależności (15) uzyskano dla sygnału testowego HeaviSine (21). Dla każdego przypadku, tzn. niezależnie od liczby próbek N i poziomu zakłócenia σ , wartość Δ była na poziomie kilku setnych (~ 0.01). Natomiast najgorsze wyniki uzyskano dla sygnału testowego Bumps (20), zwłaszcza dla małej liczby próbek ($N = 100$) i małego poziomu zakłócenia ($\sigma = 1$). Dla pozostałych sygnałów uzyskano porównywalne wyniki. We wszystkich przypadkach można stwierdzić, że większą zgodność uzyskuje się dla dużej ilości próbek wygładzanego sygnału ($N = 10000$). Uzyskane wyniki potwierdzają wcześniejsze założenie, że przedstawiona zależność na zgodność kryteriów MSE i MAE (15) dotyczy głównie wygładzania sygnałów wolnozmiennych z dużą częstotliwością próbkowania oraz o stałej wartości stałych.

Tabela 1. Wartości błędu bezwzględnego Δ (18), dla $N = 100$ próbek zaszumionego sygnału wejściowego

Lp.	b	Blocks			Bumps			HeaviSine			Doppler		
		$\sigma = 1$	$\sigma = 3$	$\sigma = 6$	$\sigma = 1$	$\sigma = 3$	$\sigma = 6$	$\sigma = 1$	$\sigma = 3$	$\sigma = 6$	$\sigma = 1$	$\sigma = 3$	$\sigma = 6$
1.	0	0,071	0,038	0,009	0,320	0,180	0,122	0,005	0,027	0,011	0,072	0,040	0,034
2.	0,067	0,153	0,070	0,001	0,312	0,197	0,145	0,005	0,030	0,022	0,120	0,069	0,021
3.	0,134	0,191	0,101	0,009	0,310	0,207	0,151	0,008	0,037	0,029	0,162	0,091	0,010
4.	0,201	0,219	0,112	0,016	0,313	0,219	0,159	0,016	0,041	0,040	0,187	0,109	0,003
5.	0,268	0,236	0,117	0,013	0,317	0,230	0,167	0,017	0,040	0,047	0,208	0,119	0,013
6.	0,335	0,247	0,125	0,004	0,322	0,241	0,173	0,010	0,022	0,056	0,224	0,129	0,021
7.	0,402	0,256	0,128	0,004	0,325	0,251	0,181	0,002	0,008	0,062	0,236	0,137	0,027
8.	0,469	0,262	0,125	0,016	0,328	0,259	0,189	0,009	0,002	0,066	0,245	0,139	0,032
9.	0,536	0,265	0,121	0,025	0,331	0,265	0,196	0,022	0,012	0,069	0,253	0,141	0,037

Tabela 2, Wartości błędu bezwzględnego Δ (18), dla $N = 1000$ próbek zsumowanego sygnału wejściowego

Lp,	b	Blocks			Bumps			HeaviSine			Doppler		
		$\sigma = 1$	$\sigma = 3$	$\sigma = 6$	$\sigma = 1$	$\sigma = 3$	$\sigma = 6$	$\sigma = 1$	$\sigma = 3$	$\sigma = 6$	$\sigma = 1$	$\sigma = 3$	$\sigma = 6$
1,	0	0,028	0,004	0,027	0,191	0,012	0,004	0,008	0,017	0,013	0,017	0,005	0,002
2,	0,067	0,05	0,002	0,024	0,281	0,036	0,002	0,007	0,019	0,018	0,023	0,005	0,006
3,	0,134	0,078	0,004	0,021	0,346	0,066	0,012	0,006	0,018	0,021	0,032	0,004	0,009
4,	0,201	0,11	0,005	0,016	0,389	0,097	0,024	0,005	0,017	0,02	0,043	0,006	0,014
5,	0,268	0,142	0,007	0,009	0,418	0,128	0,034	0,003	0,016	0,019	0,058	0,008	0,016
6,	0,335	0,168	0,009	0,004	0,436	0,156	0,045	0,001	0,013	0,018	0,076	0,01	0,016
7,	0,402	0,191	0,012	0,001	0,449	0,177	0,056	0,001	0,009	0,017	0,095	0,01	0,017
8,	0,469	0,211	0,016	0,006	0,459	0,196	0,064	0,001	0,007	0,016	0,113	0,009	0,018
9,	0,536	0,227	0,018	0,01	0,467	0,211	0,071	0,003	0,006	0,015	0,129	0,008	0,019

Tabela 3, Wartości błędu bezwzględnego Δ (18), dla $N = 10000$ próbek zsumowanego sygnału wejściowego

Lp,	b	Blocks			Bumps			HeaviSine			Doppler		
		$\sigma = 1$	$\sigma = 3$	$\sigma = 6$	$\sigma = 1$	$\sigma = 3$	$\sigma = 6$	$\sigma = 1$	$\sigma = 3$	$\sigma = 6$	$\sigma = 1$	$\sigma = 3$	$\sigma = 6$
1,	0	0,003	0,001	0,001	0,005	0,005	0,005	0,001	0,001	0,001	0,008	0,008	0,001
2,	0,067	0,006	0,002	0,002	0,004	0,004	0,004	0,002	0,002	0,002	0,009	0,009	0,001
3,	0,134	0,012	0,003	0,002	0,003	0,003	0,003	0,002	0,002	0,002	0,009	0,009	0,001
4,	0,201	0,018	0,004	0,003	0,002	0,003	0,003	0,003	0,002	0,002	0,009	0,009	0,002
5,	0,268	0,026	0,005	0,004	0,001	0,002	0,003	0,004	0,002	0,002	0,009	0,009	0,002
6,	0,335	0,034	0,005	0,004	0,002	0,003	0,003	0,004	0,002	0,002	0,008	0,008	0,003
7,	0,402	0,041	0,006	0,004	0,001	0,002	0,002	0,004	0,003	0,003	0,007	0,007	0,004
8,	0,469	0,048	0,006	0,004	0,002	0,002	0,002	0,004	0,003	0,003	0,006	0,006	0,004
9,	0,536	0,054	0,005	0,003	0,003	0,002	0,002	0,004	0,003	0,003	0,005	0,005	0,005

LITERATURA

- [1] Candy J,V,, Signal Processing The Modern Approach, McGraw–Hill, New York 1988,
- [2] Woźnicki J,, Podstawowe techniki przetwarzania obrazu, WKŁ, W-wa 1996,
- [3] Purczyński J,, Ayman J,, Stefanowski M,, Wpływ kryterium błędu na strukturę filtru dolnoprzepustowego, Mat, Konf, ZKwE'2001 s,75–78 Poznań 2001,
- [4] S,K, Mitra, J,F,Kaiser, Handbook Digital Signal Processing, John Willey 1993,
- [5] I,N, Bronsztejn i in, Nowoczesne kompendium matematyki PWN W-wa 2004
- [6] Donoho D,L, Johnstone I,M, Adapting to Unknown Smoothness via Wavelet Shrinkage, Journal of the American Statistical Association, Vol, 90, No, 432, pp, 1200–1224 1995,

THE EFFECT OF SELECTION CRITERIA ERROR FILTER FOR ASSESSMENT OPERATION SMOOTHING FILTERS

The study compared two different criteria for assessing the quality of signal processing: mean square error MSE and the mean absolute error MAE for compliance assessments, The comparison was based on the weighted moving average filter, which we include the of smoothing filters,

(Received: 1. 02. 2017, revised: 15. 02. 2017)